

III кръг на IV национална олимпиада по астрономия, април 2001г.
УЧЕНИЦИ IX ÷ X КЛАС

Задача 1. Нека вертикална цилиндрична колона се намира на екватора. При равноденствие около момента на местно пладне плътната сянка на колоната изчезва.

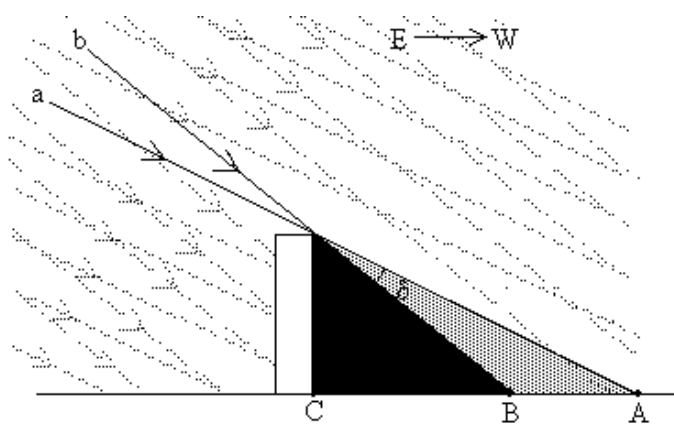
* Каква е продължителността на интервала от време, през който колоната не хвърля плътна сянка?

* Нека P е произволна точка от цилиндричната повърхност на колоната. Когато Слънцето е точно в зенита, каква част от слънчевия диск осветява точката P ?

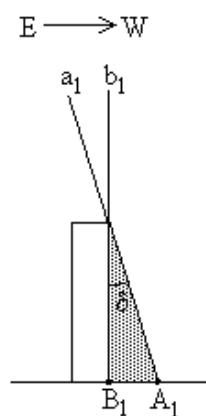
* Опишете качествено, при положение, че Слънцето е в зенита, как ще се изменя осветеността на цилиндричната повърхност на колоната от слънчевите лъчи, ако диаметърът ѝ расте неограничено?

Решение. На екватора при равноденствие Слънцето минава през зенита в момента на местното пладне. Слънцето е на огромно разстояние от нас. Затова ще считаме, че, примерно, от най-горната точка от видимия слънчев диск към земната повърхност пада сноп успоредни лъчи, а от най-долната точка на слънчевия диск – друг сноп успоредни лъчи (фиг. 1а). Двата снопа сключват помежду си ъгъл, равен на видимия ъглов диаметър на Слънцето δ . Лъчът b , идващ от горния край на слънчевия диск, и минаващ покрай най-западната точка на горния ръб на колоната, ограничава областта СВ, където не попадат никакви слънчеви лъчи и която е плътната сянка на колоната. Лъчът a , идващ от долния край на слънчевия диск, и минаващ покрай същата точка от ръба на колоната, ограничава областта ВА, където е полусянка. Нека един наблюдател върви към колоната от запад към изток. Докато се намира западно от точка А, той ще вижда целия слънчев диск. Когато достигне точка А, долният край на слънчевия диск ще започне да се скрива. Докато наблюдателят е между точка А и точка В, той ще вижда част от слънчевия диск. Когато стигне до точка В вече и горният край на слънчевия диск ще се скрие зад колоната и по-нататък наблюдателят ще навлезе в плътната сянка на колоната.

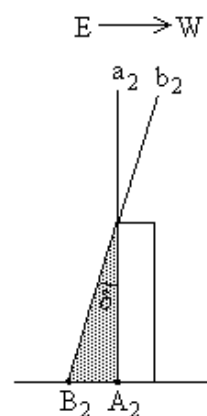
Плътната сянка на колоната ще изчезне, когато Слънцето при своето видимо денонощно движение се измести на запад до положението, в което горният край (тук вече ще го наричаме западен край) на видимия слънчев диск застане в зенита и снопът успоредни лъчи от него е перпендикулярен на земната повърхност и успореден на цилиндричната повърхност на колоната (фиг. 1б). В случая разглеждаме само лъча b_1 , минаващ покрай западната точка на горния ръб на колоната. Лъчът a_1 , идващ от източния край на слънчевия диск, маркира границата на полусянката на колоната. Колоната ще има само полусянка. Това ще продължи докато Слънцето се измести още малко, така че източният край на слънчевия диск да застане в зенита (фиг. 1в) и снопът лъчи от него да е перпендикулярен на земната повърхност. Този път разглеждаме само лъча a_2 , минаващ покрай източната точка от горния ръб на колоната. Лъчът b_2 , идващ от западния край на слънчевия диск, очертава границата на полусянката. От този момент нататък колоната пак ще има и плътна сянка, но вече от източната си страна.



Фиг. 1а



Фиг. 1б



Фиг. 1в

Означаваме с T_1 момента от време, съответстващ на ситуацията, представена на фиг. 1б, а с T_2 – момента, съответстващ на ситуацията на фиг. 1в. Търсеният интервал от време, през който колоната няма плътна сянка, е:

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

За този интервал Слънцето се е преместило на ъглово разстояние, равно на ъгъла между лъчите a_1 от фиг.1б и a_2 от фиг.1в (или което е все едно, ъгъла между лъчите b_1 и b_2). Но този ъгъл е равен на видимия ъглов диаметър на Слънцето δ . Времето, за което Слънцето при видимото си денонощно движение се измества на разстояние δ , е:

$$\Delta T = (\delta / 360^\circ) \cdot 24^h \approx 2^{\text{min}}$$

Тук 24^h е продължителността на слънчевото денонощие.

Точката Р е произволна точка от цилиндричната повърхност на колоната. Казваме, че Слънцето е точно в зенита, когато центърът на видимия му диск е в зенита. Да си представим наблюдател с точкови размери, който е в Р. За него хоризонтът ще бъде равнина, допирателна към цилиндричната повърхност на колоната (фиг. 2).

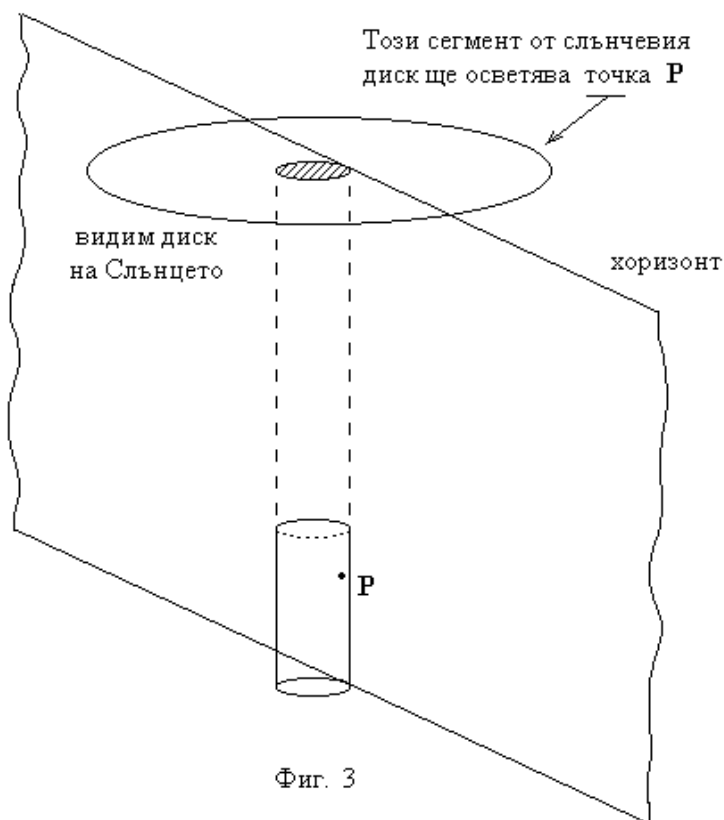


Фиг. 2

Зрителен лъч от наблюдателя Р към зенита ще съвпада с правата, в която равнината на хоризонта се допира до колоната. Този лъч сочи също и към центъра на видимия слънчев диск, понеже той е в зенита. Следователно над хоризонта за точка Р ще бъде точно половината от слънчевия диск. Това ще е и частта от него, която осветява точката Р.

Твърдението, че Слънцето в даден момент от време се намира в зенита, строго погледнато е вярно само за една точка от земната повърхност. Казвайки, че Слънцето е в зенита, ние подразбираме, че това се отнася за цялата колона, въпреки, че това е вярно само за оста на колоната. Когато диаметърът на колоната е малък, това приближение би могло да бъде прието.

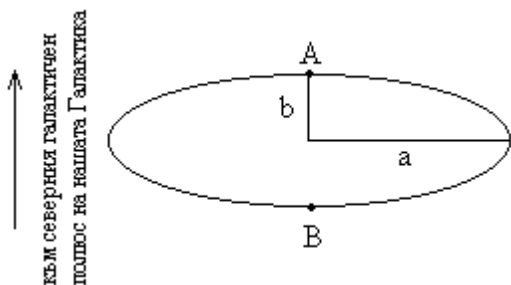
Когато, обаче, диаметърът на колоната съществено нарасне, ситуацията се променя. Тогава, когато Слънцето е в зенита за оста на колоната, продължението на цилиндричната повърхност на колоната ще пресече повърхността на Слънцето в окръжност с радиус, равен на радиуса на колоната. Примерно, когато колоната достигне по диаметър размерите на Земята, в центъра на слънчевия диск ще бъде отсечен кръг с диаметър равен на диаметъра на Земята. От този кръг няма да достига светлина до цилиндричната повърхност на колоната. Когато диаметърът на колоната продължи да расте ще нараства и диаметърът на кръга в центъра на слънчевия диск, който не участва в осветяването на цилиндричната повърхност на колоната (фиг. 3). Ъгловият размер на този кръг ще бъде равен на денонощния паралакс на колоната.



Когато диаметърът на колоната стане равен на диаметъра на Слънцето, диаметърът на кръга, който не участва в осветяването на цилиндричната повърхност на колоната, ще стане равен на диаметъра на Слънцето. Това означава, че Слънцето вече няма да осветява цилиндричната повърхност на колоната. Следователно, при нарастване на диаметъра на колоната, осветеността на цилиндричната ѝ повърхност ще намалява, докато диаметърът на колоната не стане равен на диаметъра на Слънцето. Тогава осветеността, от слънчевите лъчи, ще стане равна на нула и ще остане такава при по-нататъшно нарастване на диаметъра на колоната.

**III кръг на IV национална олимпиада по астрономия, април 2001 г.
УЧЕНИЦИ IX ÷ X КЛАС**

Задача 2.



Мъглявината в Андромеда, или M31, е единствената видима с просто око галактика на северното небе. За наблюдател, намиращ се в M31, дискът на нашата Галактика ще изглежда като светло петно с елиптична форма.

- Коя точка от нашата Галактика се намира по-близо до наблюдателя в M31 – A или B?
- В каква посока от негова гледна точка се върти нашата Галактика – по часовниковата стрелка или обратно?
- Къде приблизително се намира Слънцето – прерисувайте чертежа и означете положението на Слънцето с точка.

Обяснете своите отговори.

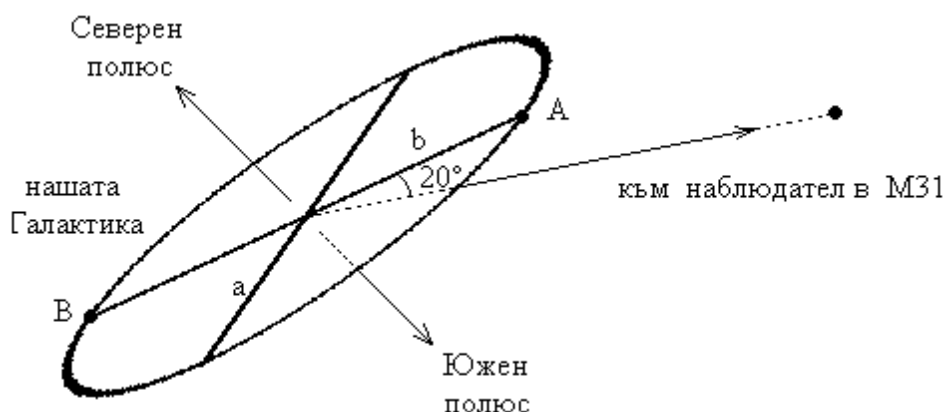
Координатите на апекса на Слънчевата система са $\alpha \approx 18^h$, $\delta \approx +30^\circ$. Галактичните полюси са точките, в които оста на нашата Галактика пресича небесната сфера. Северният галактичен полюс се намира в северната небесна полусфера.

Решение. Нашата Галактика представлява огромна звездна система с форма на диск. Слънцето се намира в Галактиката близо до средната равнина на този диск. Ние наблюдаваме това гигантско дискообразно струпване на звезди, намирайки се вътре в него. Когато гледаме по направление на равнината на диска, виждаме светла ивица от гъсто разположени звезди, която опасва цялата небесна сфера – Млечния път. Както може приблизително да се прецени от звездната карта, M31 е на около 20° от централната линия на Млечния път, или все едно – на 20° от равнината на диска на нашата Галактика.

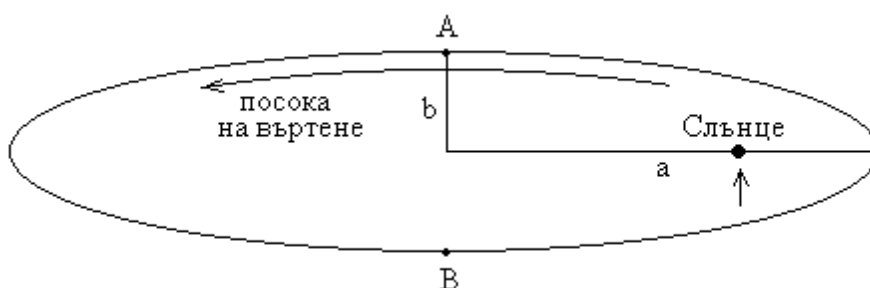
От звездната карта се вижда, че Млечният път представлява ивица, близка до голям кръг от небесната сфера. Можем да кажем, че тя разделя небесната сфера на две части – северна и южна галактична полусфера. В центровете на тези две полусфери се намират двата галактични полюса. Северният галактичен полюс е в северната небесна полусфера (тук имаме предвид полусферата, ограничена от небесния екватор, а не от Млечния път). Следователно той е в онази от галактичните полусфери, в която се намира северният небесен полюс, използван при екваториалната координатна система. Това означава, че M31 за нас се намира в южната галактична полусфера, или M31 е от южната страна спрямо равнината на диска на нашата Галактика. Наблюдателят в M31 вижда южния полюс на нашата Галактика. Дискът на нашата Галактика е ориентиран така, че точка A от чертежа е по-близо до този наблюдател от точка B.

Апексът на Слънцето е точка от небесната сфера, обозначаваща посоката, в която става движението на Слънцето в Галактиката. От дадените координати виждаме, че тя се намира някъде на границата между съзвездията Лира и Херкулес. Центърът на нашата Галактика е в посока към съзвездията Стрелец. Да си представим въображаем наблюдател, който е "стъпил" върху галактичния диск, там където е Слънцето, и стои изправен откъм северната страна диска (северният галактичен полюс му е "над главата"). При движението

на този наблюдател заедно със Слънцето центърът на Галактиката ще му остава отлясно и значи за него въртенето на Галактиката ще става по посока на часовниковата стрелка. Наблюдателят в М31, обаче вижда галактичния диск откъм южната, или в случая "долната" му страна. Следователно за него въртенето на нашата Галактика ще става в посока обратна на часовниковата стрелка.



Ние виждаме М31 приблизително на 90° вляво от Стрелец, т.е. от центъра на Галактиката. Следователно посоката от нас към М31 е приблизително перпендикулярна на посоката от нас към центъра на нашата Галактика. Понеже дискът на нашата Галактика е наклонен само на 20° спрямо посоката към М31, можем да считаме, че за наблюдателя в М31 Слънцето се намира близо до голямата ос на елипсата, в която се проектира за него нашата Галактика. Ако си представим и наблюдателя в М31 обрънат кам нас и ориентиран в същата посока (краката му са на юг спрямо равнината на нашата Галактика, а главата на север), то той ще вижда Слънцето вдясно от центъра на Галактиката. Тъй като разстоянието на Слънцето от центъра на Галактиката е около $2/3$ от нейния радиус, то можем да отбележим видимото от М31 положение на Слънцето като точка, намираща се върху голямата ос на елипсата, вдясно от галактичния център и на разстояние $2a/3$ от него.



III кръг на IV национална олимпиада по астрономия, април 2001 г. УЧЕНИЦИ IX ÷ X КЛАС

Задача 3. Вероятно сте наблюдавали как около новолуние освен тънкия светещ сърп на Луната, се вижда и слабо сияние на "тъмната", неосветената от Слънцето страна на Луната, която е обръната към Земята (пепелна светлина).

* Оценете колко пъти видимият блясък на Луната в пълнолуние е по-силен от пепелната светлина на Луната в новолуние.

* Звездната величина на Луната в пълнолуние е $-12^m.7$. Каква е звездната величина на Луната в новолуние?

Забележка: Известно е, че дори във фаза новолуние Луната в повечето случаи изглежда като много тънък сърп, защото поради наклона на лунната орбита към еклиптиката, Луната в новолуние не се намира точно на правата, свързваща Земята и Слънцето. При тази задача светенето на тънкия сърп на Луната в новолуние да не се разглежда и размерите му в сравнение с тези на "тъмната" част от Луната да се пренебрегнат.

Решение. В пълнолуние Луната свети с отразена от Слънцето светлина. Пепелната светлина, с която свети "тъмната", неосветена от Слънцето страна на Луната в новолуние и други фази, е отразена от Луната земна светлина. Приемаме, че Луната отразява слънчевата (а също и земната) светлина като диск с радиус R_L , равен на радиуса на Луната, и поради това, че повърхността ѝ не е огледално гладка, я разсейва във всички посоки. Аналогично условие приемаме и за отразяването и разсейването на слънчевата светлина от Земята, чийто радиус е R_Z . Означаваме с r_C разстоянието от Земята до Слънцето, а с r_L разстоянието от Земята до Луната. Светимостта на Слънцето е L_C . Средната осветеност на повърхността на лунния диск от Слънцето в пълнолуние е пропорционална на L_C / r_C^2 . Следователно ако площта на видимия лунен диск е S_L , а албедото на Луната е A_L , то общото излъчване на видимия лунен диск в пълнолуние е:

$$W_{LP} \sim (L_C / r_C^2) A_L S_L$$

При новолуние към Луната е обърната изцяло осветената от Слънцето страна на Земята. Общото излъчване на видимия от Луната земен диск е:

$$W_Z \sim (L_C / r_C^2) A_Z \pi R_Z^2$$

където A_Z е албедото на Земята, а πR_Z^2 е площта на видимия земен диск. Средната осветеност на повърхността на Луната от Земята в този случай е пропорционална на W_Z / r_L^2 и общото излъчване на Луната в новолуние е:

$$W_{LN} \sim (W_Z / r_L^2) A_L S_L$$

Отношението на общото излъчване на Луната в пълнолуние към това в новолуние е:

$$W_{LP} / W_{LN} = ((L_C / r_C^2) A_L S_L) / ((W_Z / r_L^2) A_L S_L)$$

$$W_{LP} / W_{LN} = (L_C / r_C^2) / ((L_C / r_C^2) A_Z \pi R_Z^2 / r_L^2)$$

$$W_{LP} / W_{LN} = r_L^2 / A_Z \pi R_Z^2$$

Използвайки стойностите за A_Z и R_Z от таблиците с данните за планетите, получаваме:

$$W_{LP} / W_{LN} \approx 3000$$

Тъй като разстоянието от Земята до Луната е едно и също, отношението на осветеностите, които Луната създава на Земята в пълнолуние и в новолуние, е равно на отношението на общото излъчване на Луната при пълнолуние и в новолуние. Следователно видимият блясък на Луната в пълнолуние е около 3000 пъти по-силен от блясъка ѝ в новолуние.

Нека $m = -12^m.7$ и m_1 са звездните величини на Луната съответно в пълнолуние и в новолуние. Използваме формулата на Погсон:

$$\lg (W_{LP} / W_{LN}) = 0.4 (m_1 - m)$$

$$m_1 = m + 2.5 \lg (W_{LP} / W_{LN})$$

$$m_1 \approx -4^m.0$$

**III кръг на IV национална олимпиада по астрономия, април 2001 г.
УЧЕНИЦИ IX ÷ X КЛАС**

Задача 4. Кога се наблюдават по-продължителни окултации на звезди от Луната – когато Луната е в перигея на своята орбита, или когато е в апогея?

Посочете какви други условия въобще са необходими, за да се наблюдават по-продължителни окултации на звезди от Луната?

Решение. Луната обикаля около Земята в посока от запад на изток и гледана от земната повърхност, се премества в тази посока на фона на неподвижните звезди.

Окултации на звезди от Луната стават, когато при това свое видимо движение тя закрива звездите. Звездите се скриват откъм източната страна на видимия лунен диск и се откриват от него откъм западната му страна.

В перигей Луната е по-близо до нас и видимият ъглов диаметър на лунния диск е по-голям, което би трябвало да доведе до по-голяма продължителност на окултациите на звезди от Луната, отколкото, когато тя е в апогей. От друга страна, съгласно втория закон на Кеплер луната в перигей се движи около Земята с най-голяма скорост, поради което продължителността на окултациите би трябвало да се съкращава. Крайният извод зависи от това кой от двата посочени фактора надделява над другия.

Нека $v_{\text{п}}$ и $r_{\text{п}}$ са линейната скорост на Луната и разстоянието ѝ до Земята в перигей, а $v_{\text{а}}$ и $r_{\text{а}}$ са стойностите на съответните величини в апогей. Според II закон на Кеплер:

$$v_{\text{п}} r_{\text{п}} = v_{\text{а}} r_{\text{а}}$$

Като имаме предвид, че $v_{\text{п}} = \omega_{\text{п}} r_{\text{п}}$ и $v_{\text{а}} = \omega_{\text{а}} r_{\text{а}}$, където $\omega_{\text{п}}$ и $\omega_{\text{а}}$ са ъгловите скорости на движение на Луната в перигей и апогей, то:

$$\omega_{\text{п}} r_{\text{п}}^2 = \omega_{\text{а}} r_{\text{а}}^2 \quad (1)$$

Означаваме с $\delta_{\text{п}}$ и $\delta_{\text{а}}$ са видимите ъглови размери на Луната в перигей и апогей. В сила е съотношението:

$$\delta_{\text{п}} / \delta_{\text{а}} = r_{\text{а}} / r_{\text{п}} \quad (2)$$

Продължителностите на една централна окултация на звезда от Луната в перигей и в апогей са съответно:

$$T_{\text{п}} = \delta_{\text{п}} / \omega_{\text{п}}$$

$$T_{\text{а}} = \delta_{\text{а}} / \omega_{\text{а}}$$

Използвайки (1) и (2) за съотношението на двата интервала от време получаваме:

$$T_{\text{п}} / T_{\text{а}} = r_{\text{п}} / r_{\text{а}}$$

Понеже очевидно $r_{\text{п}} < r_{\text{а}}$, то и $T_{\text{п}} < T_{\text{а}}$. Продължителността на окултациите в апогей е по-голяма.

Други условия да бъдат окултациите на Звезди от Луната по-продължителни, са следните:

- Движението на Луната по орбитата ѝ около Земята е в същата посока, в която е и околоосното въртене на Земята. Точките от земната повърхност "догонват" Луната при нейното движение на фона на звездите от запад на изток. Следователно колкото линейната скорост на въртене на една точка от земната повърхност относно земната ос е по-голяма, толкова окултациите на звезди от Луната ще бъдат по-продължителни. Така че, продължителността на окултациите на звезди се увеличава с приближаване на земния наблюдател към екватора.

- Видимото отместване на Луната на фона на звездите става по голям кръг от небесната сфера, представляващ проекция на лунната орбита около Земята. Той е много близък до еклиптиката, понеже сключва с нея ъгъл само 5° . Както по-горе беше казано, продължителността на окултациите се удължава за наблюдател от земната повърхност, който има по-голяма линейна скорост относно земната ос на въртене. Този ефект е максимален, когато посоката на движение на земния наблюдател около оста на Земята съвпада с посоката на видимото движение на Луната на фона на звездите. Това става, когато Луната се движи по участъци от своята орбита, които са успоредни на равнината на земния екватор, а именно, когато Луната е близо до точките от еклиптиката, съответстващи на лятното и зимното слънцестоене.

- Друг фактор за увеличаване на продължителността на окултациите е и близостта на Луната до зенита за наблюдателя. Колкото по-близо до зенита е Луната, толкова разстоянието от наблюдателя на земната повърхност до нея е по-малко и видимият ѝ ъглов диаметър е по-голям, а като е на хоризонта, Луната е най-далеч от наблюдателя в дадена точка от земната повърхност.

**III кръг на IV национална олимпиада по астрономия, април 2001г.
УЧЕНИЦИ IX ÷ X КЛАС**

Практическа задача. В телескоп е наблюдавана визуално двойна звезда. От наблюденията е пресметнато, че едната звезда е два пъти по-лека от другата. На фиг.1 е показана видимата орбита на по-леката звезда около общия център на масите.

* Постройте върху нея орбитата на по-тежката компонента.

При провеждане на спектрални наблюдения се оказало, че по-тежката от двете звезди от своя страна е тясна двойна система, в която едната компонента е три пъти по-лека от другата. На фиг.2 е показана кривата на лъчевите скорости на по-леката звезда, получена по отместване на линиите в спектъра на звездата вследствие на ефекта на Доплер.

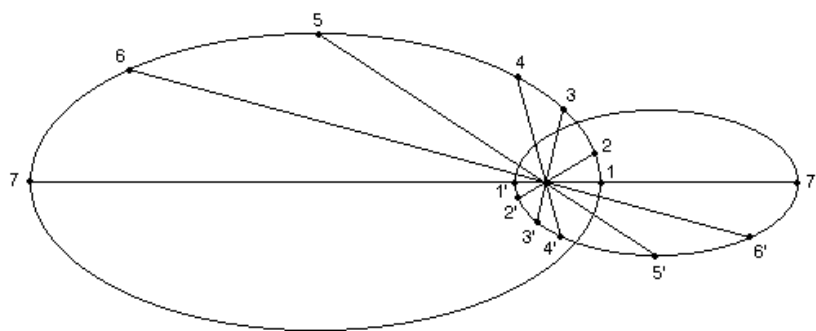
* Нарисувайте приблизително как изглежда орбитата на тази звезда и означете характерните точки – **a, b, c, d** – съответстващи на означените със същите букви точки върху кривата на лъчевите скорости. Как е ориентирана тя спрямо зрителния лъч?

* Нарисувайте върху графиката кривата на лъчевите скорости на по-тежката компонента.

Приемете, че зрителният лъч лежи в орбиталната равнина на тясната двойна система.

Решение.

* От определението за център на масите следва, че разстоянията до него са обратно пропорционални на масите на компонентите на двойната звезда. От съображение за подобие, както и поради малките ъглови размери на кратните звездни системи, следва, че това е вярно и за видимите ъглови разстояния на двете звезди до центъра на масите. Тъй като двете звезди и центърът на масите винаги лежат на една права, то на всяка точка от орбитата на по-леката звезда еднозначно съответства точка от орбитата на по-тежката звезда. Избираме една точка от дадената орбита и построяваме отсечка от избраната точка до центъра на масите, след което я продължаваме с половин дължина. Крайната точка на така получената отсечка е точка от орбитата на по-тежката звезда.

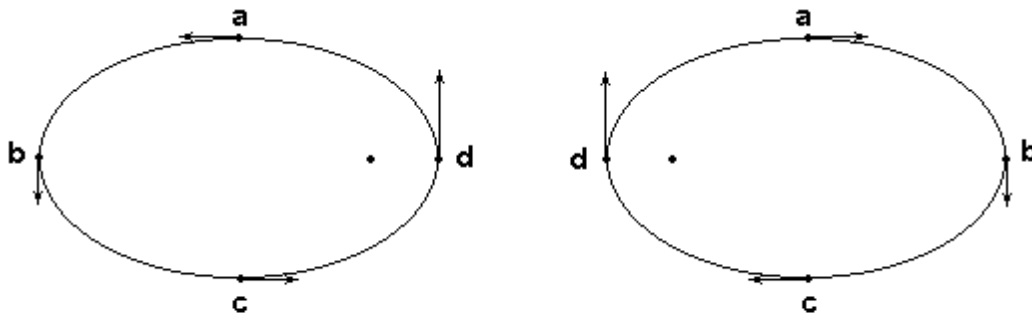


фиг.1

Като повторим тази процедура за голям брой различни точки, разпределени по орбитата на едната компонента, можем да получим достатъчен брой точки от орбитата на другата компонента и с добра точност да възстановим нейната орбита (фиг. 1).

• Тъй като кривата на лъчевите скорости не е синусоида, то орбитата не е кръгова, а е елипса. Кривата не е симетрична и следователно орбитата не е ориентирана с голямата си ос успоредно на зрителния лъч. Освен това забелязваме, че всеки един от двата участъка на кривата (под и над абсцисата) е симетричен, т.е. **ab** е симетрично на **bc** и **cd** е симетрично на **da**. Следователно голямата ос на орбитата е стриктно перпендикулярна на зрителния лъч. Точките **a** и **c** имат лъчеви скорости $V_R = 0$ и следователно съответстват на точки, в които звездата се движи перпендикулярно на зрителния лъч. В точка **b** лъчевата скорост има максимална отрицателна големина и следователно съответства на точка от орбитата, в която звездата се движи право към нас. Аналогично точка **d** съответства на точка от орбитата, в която звездата се отдалечава от нас право по зрителния лъч. При това там скоростта е максимална, от което следва, че в точка **d** звездата е в периастрий.

Следователно орбитата ще изглежда така (фиг. 2) :



фиг.2

Възможните орбити са две, поради двете възможни посоки на обикаляне по орбитата.

• Тъй като двойната звезда можем да приемем за затворена механична система, за нея можем да запишем закона за запазване на импулса. Ако работим в координатна система, свързана с центъра на масите, то:

$$M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2 = 0$$

Където $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ са пространствените скорости на звездите и са векторни величини.

Следователно:

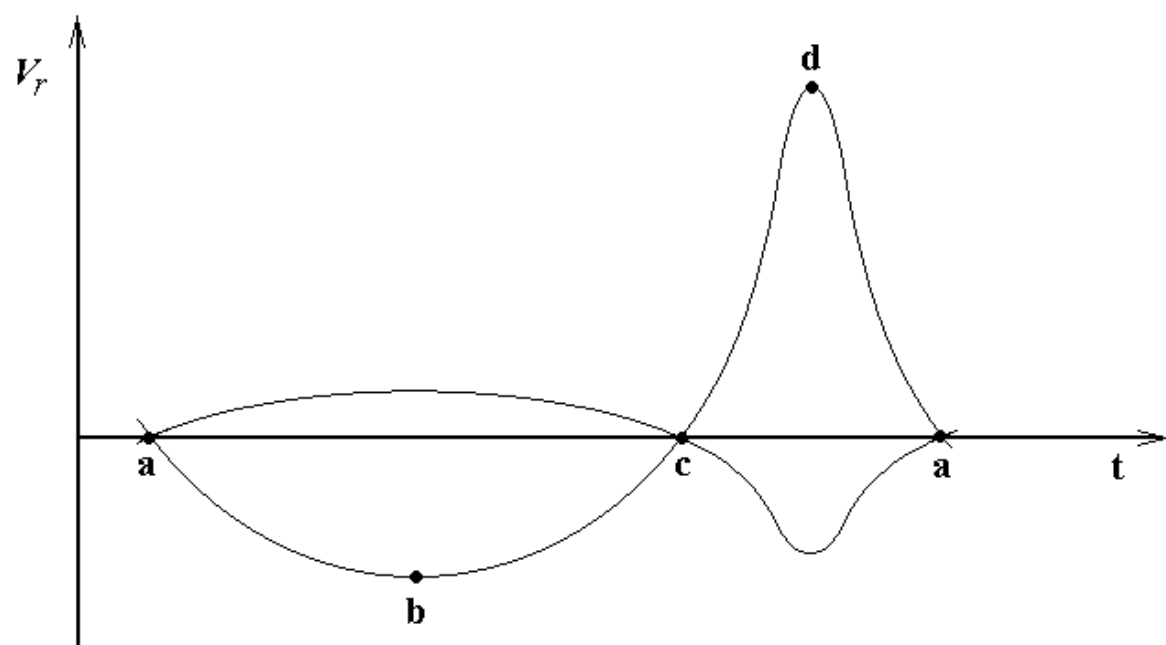
$$M_1 \mathbf{v}_1 = -M_2 \mathbf{v}_2$$

От тук следва, че скоростите на звездите са успоредни по направление и противоположни по посока. За абсолютните стойности на скоростите можем да запишем:

$$v_1 / v_2 = M_2 / M_1$$

т.е. те са обратно пропорционални на масите на звездите.

От елементарни геометрични съображения е ясно, че тези разсъждения са верни и залъчевите скорости на звездите. Следователнолъчевата скорост на по-тежката компонента във всеки момент от време ще бъде обратна по посока и три пъти по-малка по големина отлъчевата скорост на леката компонента (фиг. 3).



фиг.3